Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\frac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) Sea R la región limitada por el interior de $x^2+y^2=1$ y el interior de $x^2+y^2=2x$. Se pide:

   a) **[4 ptos.]** Hacer un dibujo de la región R.

   b) **[8 ptos.]** Escribir, ***sin calcular***, el área de la región R en coordenadas rectangulares en el orden $dx\,dy$ y $dy\,dx$.

   c) **[8 ptos.]** Escribir, ***sin calcular***, el área de R usando coordenadas polares.

2) **[10 ptos.]** Realizando un cambio de variable adecuado, calcular $\displaystyle\int\int_R \sin\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\,dA$, donde R es el trapecio con vértices $(1,1),(2,2),(4,0),(2,0)$.

3) Sea el sólido Q definido como:

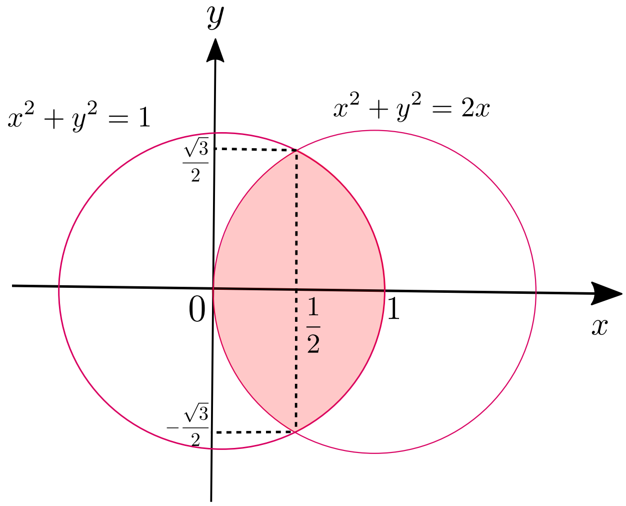
$$Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1, 0\leq z\leq x^2+y^2\}$$

   a) **[10 ptos.]** Calcular el volumen de Q usando integrales dobles.

   b) **[10 ptos.]** Expresar sin calcular el volumen de Q en coordenadas cilíndricas.

   c) **[10 ptos.]** Expresar sin calcular el volumen de Q en coordenadas esféricas.

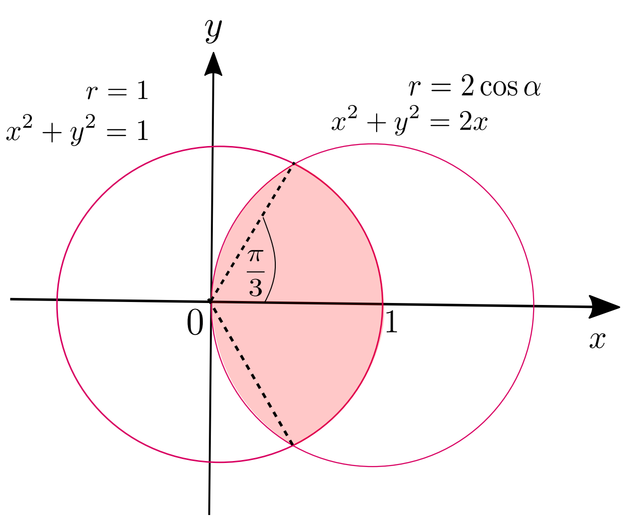
1) a) La regfión de integración es la que se muestra a continuación



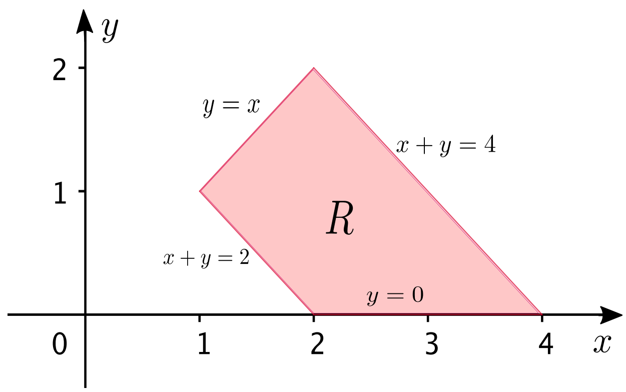
4 puntos

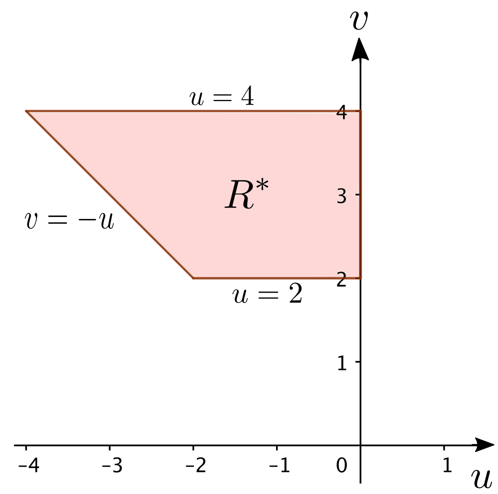
b)

- $\underbrace{\int_0^{1/2}\int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy\,dx}_{2pt} + \underbrace{\int_{1/2}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx}_{2pt}$
- $\underbrace{\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy}_{4pt}$
- $\underbrace{2\int_0^{\pi/3}\int_0^{1} r\,dr\,d\alpha}_{4pt} + \underbrace{2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\alpha} r\,dr\,d\alpha}_{4pt}$



2) La región de integración





Haciendo el cambio de variable

$$u = y - x \qquad v = y + x$$

- $y - x = 0 \Rightarrow u = 0$
- $y + x = 2 \Rightarrow v = 2$
- $y + x = 4 \Rightarrow v = 4$
- $y = 0 \Rightarrow \dfrac{u+v}{2} = 0 \Rightarrow v = -u$
- $J = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}$

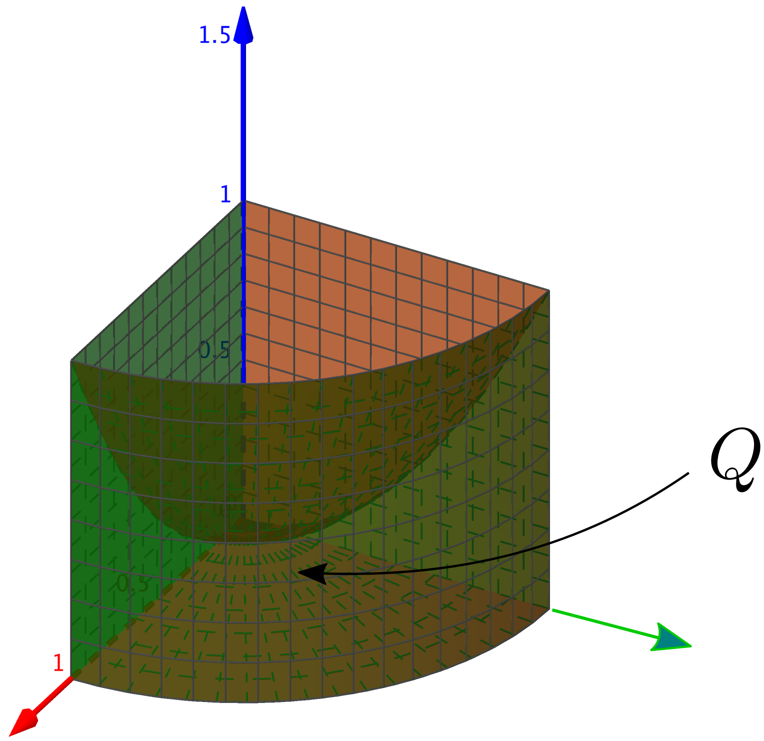
5 puntos

Así

$$\int \int_R \sin\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\, dA = \int_2^4 \int_{-v}^0 \frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{v}\right)\, du\, dv = 3\cos(1) - 3$$

5 puntos

3) El solido Q es el siguiente



a) $V(Q) = \underbrace{\int\int_D x^2 + y^2 \, dA}_{5pt} = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\alpha = \underbrace{\frac{\pi}{8}}_{5pt}$

b) $V(Q) = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{r^2} r \, dz \, dr \, d\alpha}_{10pt}$

c) $\underbrace{\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\cos\varphi/\sin^2\varphi}^{\csc\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\alpha}_{10pt}$